Seminario de Mecánica Cuántica

Práctica I (Curso 2018)

I **Operador densidad.**

I.1 Demostrar que un operador densidad ρ describe un estado puro sii $\rho^2 = \rho$.

I.2 Mostrar que si ρ_i, $i = 1, \ldots, m$, son operadores densidad de un mismo sistema, entonces

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} p_i \rho_i, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1\,,$$

es también un operador densidad de ese sistema. Es decir, el conjunto de operadores de densidad para un dado sistema es un conjunto convexo.
Si existe un $p_i < 0$, con $\sum_i p_i = 1$, puede ρ seguir siendo un operador densidad?

I.3 a) Mostrar que $\rho = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$, con $p \in (0,1)$ y $\langle 0|1\rangle = 0$, puede ser escrito como

$$\rho = \frac{1}{2}(|\theta\rangle\langle\theta| + |-\theta\rangle\langle -\theta|)$$

donde $|\pm\theta\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle \pm \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$. Determinar θ. Interpretar la expresión.
b) Mostrar que si el mismo ρ es escrito como

$$\rho = q|\alpha\rangle\langle\alpha| + (1-q)|\beta\rangle\langle\beta|$$

con $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ normalizados pero no necesariamente ortogonales, entonces $q \in [1-p, p]$ (asumiendo $p \geq 1/2$), es decir, $(q, (1-q)) \prec (p, 1-p)$.

I.4 Mostrar que la matriz densidad más general para un qubit puede escribirse como

$$\rho = \tfrac{1}{2}(I_2 + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})$$

donde $\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)$ es un vector arbitrario con $|\boldsymbol{r}| \leq 1$, y $\boldsymbol{\sigma} = (X, Y, Z) \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ las matrices de Pauli. Determine los autovalores de ρ e indique en qué casos ρ representa un estado puro. Exprese también $\boldsymbol{r}$ en términos de $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = \mathrm{Tr}\,\rho\,\boldsymbol{\sigma}$.

I.5 Generalizar I.4 a un sistema de i) dos qubits ii) n qubits.

I.6 Determinar todos los valores posibles de x para los cuales

$$\rho = x|\Phi\rangle\langle\Phi| + (1-x)I_d/d$$

con $|\Phi\rangle$ un estado normalizado e I_d la identidad de $d \times d$ ($d = \mathrm{Tr}\, I_d$ es la dimensión del espacio de estados), es un operador densidad. Interpretar este estado.

II **Estados de sistemas compuestos. Entrelazamiento.**

II.1 Para un sistema de dos qubits, escribir explícitamente la matriz densidad que representa a $\rho_{AB} = |\Phi_{AB}\rangle\langle\Phi_{AB}|$ en la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ para:
a) $|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}$ b) $|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}}$ c) $|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle}{2}$

II.2 Hallar la descomposición de Schmidt de los estados anteriores.

II.3 Hallar la matriz densidad reducida $\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho_{AB}$ en todos los casos anteriores, y a partir de ella evaluar la entropía de entrelazamiento del estado.

II.4 Para $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, hallar la descomposición de Schmidt del estado

$$|\Psi_{AB}\rangle = \alpha \tfrac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \tfrac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

e indicar cuando el estado será a) separable, b) entrelazado, c) máximamente entrelazado.

II.5 Mostrar que los operadores $\sigma_\mu \otimes \sigma_\mu$, $\mu = x, y, z$, son diagonales en la base de Bell.

II.6 Explicar la diferencia entre el estado de Bell $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$ y el estado descripto por el operador densidad

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$$

Hallar un observable $O = O_A \otimes O_B$ que logre distinguirlos y otro que no logre distinguirlos.